6.1.6 Dynamika ve speciální teorii relativity

Předpoklady: 6105

Speciální teorie relativity zakazuje nadsvětelné rychlosti. ⇒
Problém: Pokud by raketa měla motor, který bude pracovat dost dlouho, podle dosavadních zkušeností jednou překoná rychlost světla (dokonce by stačilo na jeden konec rakety přidělat zrcadlo a strkat do ní světelným paprskem ze Země. I ve chvíli, kdy už raketa poletí skoro rychlostí světla, se světlo bude vůči ní pohybovat rychlostí světla a bude do ní strkat stejně silně jako na počátku).

Př. 1: Raketa se pohybuje s konstantním zrychlením $10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ (nic nedosažitelného). Urči, za jakou dobu dosáhne podle zákonů klasické fyziky rychlosti světla.

Konstantní zrychlení ⇒ rovnoměrně zrychlený pohyb: $v=v_0+at$ pokud raketa začíná z klidu $v=at$.

$$t=\frac{v}{a}=\frac{300000000}{10}\,\mathrm{s}=30\,000\,000\,\mathrm{s}$$

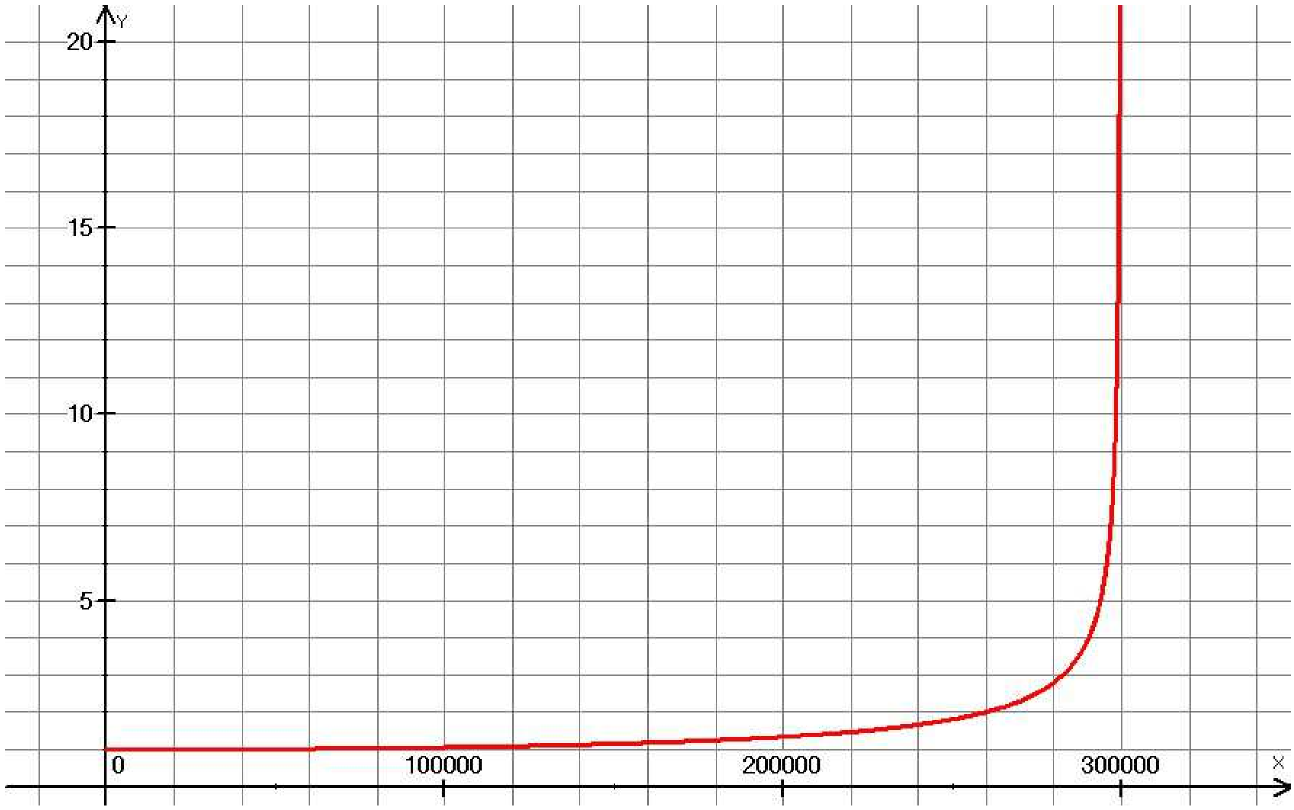
Kolik je to let? $\frac{30\,000\,000}{3600\cdot 24\cdot 365{,}25}=0{,}95\,\mathrm{roku}$ To není nic nedosažitelného, po necelém roce by raketa překonala rychlost světla (což nejde) ⇒ relativita popisuje zrychlování určitě jinak.

Pozorovatel na Zemi musí vidět, že zrychlování rakety (klasicky dané vzorcem $a=\frac{F}{m}$) se postupně zmenšuje, i když motory pořád pracují a tlačí raketu stejnou silou ⇒ pozorovateli na Zemi se zdá, že raketa je stále těžší a těžší.

⇒ Hmotnost už není neměnná absolutní veličina, nezávislá na pozorovateli, ale mění se s rychlostí pozorovatele podle vzorce: $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

- m - hmotnost pro pozorovatele, který se vůči předmětu pohybuje.
- m_0 - hmotnost pro pozorovatele, který vůči předmětu stojí, vždy nejmenší.

⇒ Když se rychlost blíží c , hmotnost roste k nekonečnu ⇒ zrychlení $a=\frac{F}{m}$, které vidí pozorovatel ze Země, se zmenšuje k nule ⇒ raketa nepřekročí rychlost světla.



Př. 2: Kosmonaut vážil na Zemi 80 kg. Jaká je jeho hmotnost v raketě, která se vůči Zemi pohybuje rychlostí 100 000 km/s?

Špatně položená otázka. Pokud se ptáme na hmotnost, musíme uvést i vztažnou soustavu, ze které ji chceme měřit.
Z pohledu rakety: Kosmonaut vůči ní stojí $\Rightarrow$ jeho hmotnost je 80 kg.
Z pohledu Země: Kosmonaut se pohybuje $\Rightarrow$ hmotnost určíme pomocí vzorce

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{80}{\sqrt{1-\frac{100000^2}{300000^2}}}\,\mathrm{kg}=84{,}9\,\mathrm{kg}$$

Při pohledu z rakety se kosmonautova hmotnost nezmění, při pohledu ze Země vzroste na 84,9 kg.

Př. 3: Urči, jakou rychlost musí mít elektron $m_e=m_0=9{,}1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$, aby měl stejnou hmotnost jako proton v klidu $m_p=m=1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Výsledek urči jako násobek rychlosti světla.

$m_p=m=1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $m_e=m_0=9{,}1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $v=?$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0}{m}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{m_0^2}{m^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{m_0^2}{m^2}$$

$$v=c\cdot\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}$$

Dosadíme: $v=c\cdot\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}=c\cdot\sqrt{1-\frac{(9{,}1\cdot 10^{-31})^2}{(1{,}67\cdot 10^{-27})^2}}=0{,}99999985\,c$.

Je to sice obrovská rychlost, ale hmotnost elektronu se zvětší víc než tisíckrát.

Př. 4: V roce 2008 byl uveden do zkušebního provozu (a ihned poté se na rok rozbil) největší urychlovač LHC ve Švýcarském Cernu. Urči, jakou největší rychlost může v tomto urychlovači dosáhnout proton. Obvod urychlovače měří 27 km a supravodivé magnety, které udržují urychlované částice na kruhové dráze jsou schopny vytvářet magnetické pole o indukci 8 T. Při výpočtu užij přesnější hodnotu rychlosti světla 299 792 458 m/s.

$m_p=1{,}67262158\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $c=299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$, $e=1{,}602176462\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $o=27\,\mathrm{km}=27000\,\mathrm{m}$, $B=8\,\mathrm{T}$, $v=?$

Vyjdeme z odvození z loňského ročníku.

$F_m=F_d$ (magnetická síla hraje roli síly dostředivé)

Dosadíme: $F_m=e\cdot v\cdot B$, $F_d=m\cdot\frac{v^2}{r}$ $\Rightarrow$ $e\cdot v\cdot B=m\cdot\frac{v^2}{r}$.

Upravíme: $e\cdot B\cdot r=m\cdot v$.

Hmotnost protonu se mění dosadíme: $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\Rightarrow$ $e\cdot B\cdot r=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$.

$e\cdot B\cdot r\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=m_0\cdot v$ (umocníme)

$$(e\cdot B\cdot r)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2\cdot v^2$$

$$(e\cdot B\cdot r)^2(c^2-v^2)=m_0^2\cdot v^2\cdot c^2$$

$$(e\cdot B\cdot r\cdot c)^2=(m_0\cdot v\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r\cdot v)^2$$

$$(e\cdot B\cdot r\cdot c)^2=v^2\cdot[(m_0\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r)^2]$$

$$v^2=\frac{(e\cdot B\cdot r\cdot c)^2}{(m_0\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r)^2}$$

$$v=\frac{e\cdot B\cdot r\cdot c}{\sqrt{(m_0\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r)^2}}$$

Z obvodu urychlovače určíme jeho poloměr. $o=2\cdot\pi r\Rightarrow r=\frac{o}{2\pi}=\frac{27000}{2\pi}\,\mathrm{m}=4297\,\mathrm{m}$

$$v=\frac{1{,}602176462\cdot 10^{-19}\cdot 8\cdot 4297\cdot 299792458}{\sqrt{(1{,}67262158\cdot 10^{-27}\cdot 299792458)^2+(1{,}602176462\cdot 10^{-19}\cdot 8\cdot 4297)^2}}=299792456{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Vyšlo jen o necelé 2 m/s méně než je přesná hodnota c v kalkulačce.

I v STR platí definiční vztah hybnosti $p=m\cdot v=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$ a zákon zachování hybnosti.

Zavedení vzorce pro změnu hmotnosti je jedinou změnou, kterou musíme provést s rovnicemi klasické mechaniky, aby začaly být invariantní s Lorentzovou transformací (a nedalo se mechanickým pokusem zjistit, zda se pohybujeme nebo stojíme).

Postřeh: Při zrychlování tělesa se zvětšuje jeho hmotnost i kinetická energie $\Rightarrow$ neexistuje vztah mezi těmito veličinami?
Po delším odvozování bychom získali: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ $\Rightarrow$ hmotnost je jenom jeden z druhů energie, neplatí zákon zachování hmotnosti v klasickém pojetí.
I když se zastavíme, pořád něco vážíme $\Rightarrow$ $E_0 = m_0 \cdot c^2$ klidová energie,
$\Rightarrow$ vždy platí základní vztah: $E = m \cdot c^2$.
Důsledky:

- Žádný předmět s nenulovou klidovou hmotností nemůže dosáhnout rychlosti světla (měl by nekonečnou energii).
- Fotony letí rychlostí světla $\Rightarrow$ musí mít nulovou klidovou hmotnost (nesmí se zastavit = pořád letí nebo zaniknou).

Př. 5: Urči, jak se změní hmotnost 1 kg uhlí při jeho spálení, pokud se při tom uvolní energie 30 MJ.

Použijeme vzorec $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$.

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{30 \cdot 10^6}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{kg} = 3{,}3 \cdot 10^{-10} \text{kg}$$

Tak malý rozdíl se špatně měří, není divu, že si toho chemici nevšimli.

Shrnutí: Hmotnost tělesa závisí na vztažné soustavě podle vzorce $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. Energie tělesa odpovídá jeho hmotnosti: $E = m \cdot c^2$.